



فصل اول

اعداد صحیح و گویا



مجموعه اعداد طبیعی: اعداد طبیعی شامل اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ... می‌شوند.

مجموعه اعداد صحیح: $\{ \dots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \dots \}$

مجموعه اعداد صحیح

در سال‌های قبل، با اعداد صحیح آشنا شدیم. این مجموعه، شامل اعداد مثبت (همان اعداد طبیعی)، اعداد منفی و عدد صفر می‌باشد.

نکته



۱) عدد صفر، نه منفی است و نه مثبت؛ در واقع عدد صفر علامت ندارد.

۲) تعداد اعداد صحیح بی‌شمار است، یعنی هرگز نوشتن آن‌ها تمام نمی‌شود.

۳) اعداد منفی، هرچه قدر مقدارشان بیش‌تر می‌شود، ارزش کم‌تری پیدا می‌کنند.

$$-97 < -17$$

$$-1020 < -55$$

۴) تمام اعداد منفی، از صفر کوچک‌تر هستند و صفر هم از اعداد مثبت کوچک‌تر است.

اعداد مثبت $<<$ اعداد منفی

$$73 = +73$$

۵) اگر برای عددی، علامت ننوشتیم، علامت آن مثبت است.

مثال ۱ روی محور زیر، هر یک از اعداد مشخص شده، چه عددی را نمایش می‌دهند؟



مثال ۲ هر یک از حرکتهای زیر، چه عددی را نمایش می‌دهند؟



$A = -3$ = ۳ واحد به سمت منفی‌ها

$B = +2$ = ۲ واحد به سمت مثبت‌ها

$C = +4$ = ۴ واحد به سمت مثبت‌ها

$D = -1$ = یک واحد به سمت منفی‌ها

$E = 0$ = بدون جابه‌جایی

قرینه یک عدد: در قرینه هر عدد، علامت آن عدد عوض می‌شود. تنها عددی که قرینه آن برابر با خودش است، عدد صفر است.

الف) $+3 \rightarrow$ قرینه -3

ب) $-7 \rightarrow$ قرینه $+7$

ج) $0 \rightarrow$ قرینه 0

تعیین علامت یک عدد: گاهی برای یک عدد، بیش از یک علامت نوشته شده است. برای انجام محاسبات، حتماً باید ابتدا **تعیین علامت** کنیم. برای تعیین علامت یک عدد، فقط **علامت‌های منفی** را شمارش می‌کنیم. اگر تعداد آن‌ها **فرد** بود، حاصل **منفی** و اگر تعداد آن‌ها **زوج** بود، حاصل **مثبت** است.

مثال ۳ هر یک از عبارتهای زیر را تعیین علامت کنید.

الف) $+3 \xrightarrow{2 \text{ علامت منفی}} -(-3)$ ب) $+4 \xrightarrow{\text{صفر علامت منفی}} +(4)$
 ج) $-5 \xrightarrow{3 \text{ علامت منفی}} -(-(-5))$ د) $-8 \xrightarrow{\text{یک علامت منفی}} -(+8)$

جمع اعداد صحیح: در جمع دو عدد صحیح، اگر هر دو، علامت **یکسان** داشتند، مقدار آن‌ها را با هم **جمع** می‌کنیم و همان علامت را برای حاصل قرار می‌دهیم؛ مانند:

الف) $-8 - 5 = -13$ ب) $+7 + 9 = +16$

ولی اگر دو عدد، علامت **متفاوتی** داشتند، مقدارها را از هم **کم** می‌کنیم و علامت عددی را که مقدار **بزرگ‌تری** دارد، قرار می‌دهیم؛ مانند:

الف) $-6 + 9 \xrightarrow{9 > 6} +3$ ب) $-6 - 11 \xrightarrow{11 > 6} -17$

نکته



۱) اگر عددی، چند علامت داشت، ابتدا آن را تعیین علامت می‌کنیم؛ مانند:

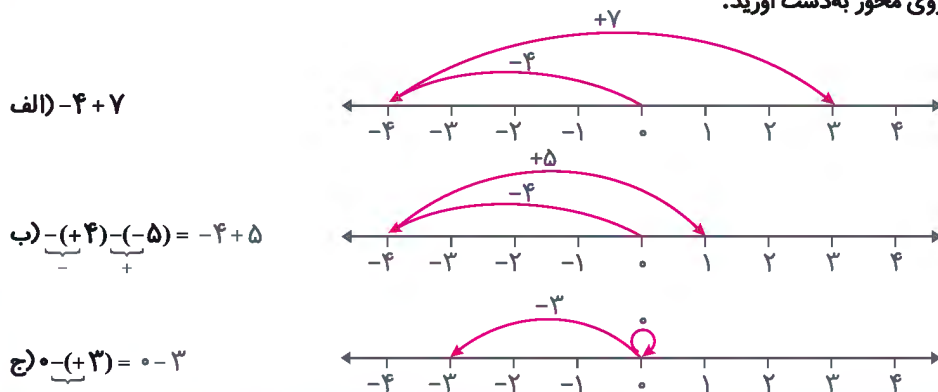
الف) $+5 - (-4) = +5 + 4 = +9$ ب) $-7 + (-2) = -7 - 2 = -9$ ج) $-(-8) - (-3) = +8 + 3 = +11$

۲) چنانچه بخواهیم چندین عدد را با هم جمع و تفریق کنیم، از **سمت چپ** مرحله به مرحله محاسبه را انجام می‌دهیم؛ مانند:

$-6 + 8 - 9 - 10 + 15 = +2 - 9 - 10 + 15 = -7 - 10 + 15 = -17 + 15 = -2$

نمایش جمع اعداد صحیح روی محور: هرگاه بخواهیم جمع دو عدد صحیح را روی محور نمایش دهیم، ابتدا از **صفر** به اندازه **عدد اول** حرکت می‌کنیم و سپس از نقطه‌ای که به آن رسیده‌ایم، به اندازه **عدد دوم** حرکت می‌کنیم. (در صورت نیاز، ابتدا اعداد را تعیین علامت می‌کنیم).

مثال ۴ حاصل هر عبارت را روی محور به دست آورید.



نکته



جمع هر عدد و قرینه‌اش برابر با **صفر** می‌شود؛ مانند:

الف) $-4 + 4 = 0$ ب) $-6 + (+6) = -6 + 6 = 0$



جمع با استفاده از ارزش مکانی: یکی از روش‌های جمع دو عدد، استفاده از جدول ارزش مکانی است. در این روش، ابتدا هر رقم را با رقم متناظر خودش جمع می‌کنیم و سپس حاصل عبارت‌ها را با هم جمع می‌کنیم.

مثال ۵ حاصل جمع‌های زیر را با استفاده از جدول ارزش مکانی انجام دهید.

الف) $105 - 392 =$

ب) $97 + 456 =$

دقت کنید عددی مانند ۳۹۲- را می‌توانیم به صورت $2 - 90 - 300$ بنویسیم.

	یکان	دهگان	صدگان
الف) $392 \Rightarrow$	-۲	-۹۰	-۳۰۰
$105 \Rightarrow$	-۵	۰	-۱۰۰
	-۷	-۹۰	-۴۰۰
	$-400 - 90 - 7 = -497$		
	-490		

	یکان	دهگان	صدگان
ب) $456 \Rightarrow$	-۶	-۵۰	-۴۰۰
$97 \Rightarrow$	+۷	+۹۰	۰
	+۱	+۴۰	-۴۰۰
	$-400 + 40 + 1 = -359$		
	-360		

ضرب علامت‌ها: برای ضرب دو علامت، از رابطه‌های روبه‌رو استفاده می‌کنیم: $- \times + = -$, $+ \times - = -$, $- \times - = +$, $+ \times + = +$

ضرب اعداد صحیح: برای ضرب دو عدد صحیح، ابتدا علامت‌های آن‌ها را ضرب می‌کنیم و سپس خود اعداد را در هم ضرب می‌کنیم.

مثال ۶ حاصل ضرب‌های زیر را به دست آورید.

الف) $(-7) \times (-3) = \overset{+ \times - = -}{-21} + 21$

ب) $-6 \times (+4) = \overset{- \times + = -}{-24}$

نکته



۱ در صورتی که بین یک عدد و یک پرانتز، هیچ علامتی وجود نداشته در واقع علامت بین آن‌ها ضرب است.

$-8(-3) = \overset{- \times - = +}{+24}$

۲ برای ضرب چند عدد صحیح هم می‌توانیم، ابتدا کل علامت‌ها را در هم ضرب کرده و سپس اعداد را در هم ضرب کنیم.

مثال ۷ حاصل ضرب‌های زیر را به دست آورید.

الف) $-7 \times (-2) \times (+4) = \overset{+ \times - \times + = +}{+56}$

ب) $-6 \times (-5) \times (-9) = \overset{- \times - \times - = -}{-270}$

تقسیم اعداد صحیح: در تقسیم دو عدد صحیح، ابتدا علامت‌ها را در هم ضرب می‌کنیم و سپس عدد اول را بر عدد دوم تقسیم می‌کنیم؛ مانند:

الف) $-8 \div (+2) = \overset{- \times + = -}{-4}$

ب) $-20 \div -10 = \overset{- \times - = +}{+2}$

اولویت در محاسبات: در محاسبات ریاضی، اولویت‌ها به صورت زیر است:

۱) اگر پرانتز داشته باشیم، باید ابتدا حاصل پرانتز را حساب کنیم.

۲) در هنگام محاسبه (چه درون پرانتز و چه خارج از پرانتز) همواره ابتدا از سمت چپ، ضرب‌ها و تقسیم‌ها را انجام می‌دهیم (دقت کنید،

هر کدام سمت چپ بود، آن را زودتر انجام می‌دهیم).

$-50 \div (-5) \times 3 = \overset{+10}{+30} + 10 \times (+3) = +30$

۳) پس از انجام ضرب‌ها و تقسیم‌ها، جمع‌ها و تفریق‌ها را انجام می‌دهیم.



مثال ۸ حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) ابتدا ضرب و تقسیم $8 - 3 \times (-2) + 20 = \frac{8-3 \times (-2)}{+6} + 20 = \frac{8+6}{+14} + 20 = +34$

ب) $-8 \times (-2) + 12 \div (-3) - 4 \times (-2) \times 5 = \frac{+16}{+16} - \frac{4}{-4} + \frac{40}{+40} = +52$

ج) $-8 \div (-2) \times (+3) - 5 + 4(-8) - 6 + 6(-3) \div (-9) = \frac{+12}{+4} - 5 - \frac{32}{-32} - 6 + \frac{(-18)}{+2} = +12 - 5 - 32 - 6 + 2 = -29$

مثال ۹ حاصل هر عبارت را محاسبه کنید.

الف) ابتدا داخل هر پرانتز را حساب می‌کنیم:
 $+10 - 10 \times (+12 - 24 \div (-2)) = +10 - 10 \times (+24) = +10 - 240 = -230$

ب) $7 - (-6) - 11 \times \underbrace{(-10)}_{+10} - \underbrace{5 \times 2}_{-10} = 7 - (-6) - 11 \times 0 = 7 - (-6) = 7 + 6 = +13$

یادآوری مفهوم توان: هرگاه عددی به توان برسد، باید آن را به تعداد توانش، در خودش ضرب کنیم؛ مانند:

الف) $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = +8$

ب) $(-3)^2 = (-3) \times (-3) = +9$

نکته

اگر عدد داخل پرانتز **نبود** علامت آن را فقط **یک بار** حساب می‌کنیم؛ مانند:

الف) $-2^3 = -2 \times 2 \times 2 = -8$

ب) $-3^2 = -3 \times 3 = -9$



مثال ۱۰ حاصل عبارت مقابل را محاسبه کنید.

$-3^2 - 2 \times (40 \div (-2)^2 + 10) + 5^2 =$

$-3^2 = -3 \times 3 = -9$, $(-2)^2 = (-2) \times (-2) = +4$, $5^2 = 5 \times 5 = 25$

ابتدا اعداد توان دار را به صورت عدد معمولی می‌نویسیم.

$\Rightarrow -9 - 2 \times \underbrace{(40 \div (+4) + 10)}_{+20} + 25 = -9 - 2 \times \underbrace{(10 + 10)}_{+20} + 25 = -9 - 40 + 25 = -24$

نکته

اگر در یک عبارت ریاضی، پرانتزها به صورت تودرتو بودند، برای انجام محاسبات از **داخلی‌ترین پرانتز** شروع می‌کنیم.



مثال ۱۱ حاصل عبارت‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $12 - (5 - (6 - 7) - 3) = 12 - (5 - \underbrace{(6-7)}_{-1} - 3) = 12 - (5 - \underbrace{(-1)}_{+1} - 3) = 12 - \underbrace{(5+1-3)}_{+3} = 12 - \underbrace{(+3)}_{-3} = 12 - 3 = 9$

ب) $40 - (18 - (12 - 10)) = 40 - (18 - \underbrace{(12-10)}_{+2}) = 40 - (18 - \underbrace{(+2)}_{-2}) = 40 - \underbrace{(18-2)}_{+16} = 40 - \underbrace{(+16)}_{-16} = 40 - 16 = +24$

نکته

اگر کسی داشتیم که در صورت و مخرج آن، عبارت‌های عدد صحیح بود، حاصل صورت و مخرج را جداگانه محاسبه می‌کنیم و در نهایت در صورت امکان، صورت را بر مخرج تقسیم می‌کنیم. (اگر امکان تقسیم کردن **نبود** پاسخ را به همان صورت کسری می‌نویسیم.)





$$\frac{24 - 24(8 - 36 + (-2) - 16)}{12 - 2(8 - (5 - 9) - 10)} =$$

مثال ۱۲ حاصل عبارت مقابل را به دست آورید.

① $24 - 24 \times (8 - 36 + (-2) - 16) = 24 - 24 \times (8 + 18 - 16) = 24 - 24 \times (+10) = 24 - 240 = -216$ حاصل صورت

② حاصل مخرج: $12 - 2 \times (8 - (5 - 9) - 10) = 12 - 2 \times (8 - (-4) - 10) = 12 - 2 \times (8 + 4 - 10) = 12 - 2 \times (+2) = 12 - 4 = +8$

① و ② $\Rightarrow \frac{-216}{+8} = -216 \div (+8) = -27$

مثال ۱۳ دمای هوای تهران ۱۱ درجه بالای صفر است. دمای هوای یاسوج ۱۸ درجه از آن سردتر است. اگر دمای هوای گرمسار، ۲۰ درجه از میانگین دمای این دو شهر، گرم‌تر باشد، دمای هوای گرمسار چه قدر است؟

دمای یاسوج = $+11 - 18 = -7$
 میانگین دمای تهران و یاسوج = $\frac{(+11) + (-7)}{2} = \frac{+11 - 7}{2} = \frac{+4}{2} = +2$
 دمای گرمسار = $(+2) + 20 = +22$

مثال ۱۴ در میان گزینه‌های داده شده، اعداد طبیعی را مشخص کنید.

الف) عدد صحیح -11 ب) عدد طبیعی $+2 = \frac{-\sqrt{64}}{-\sqrt{16}} = \frac{-8}{-4}$

ج) $-5^3 + 200 = -125 + 200 = +75$ عدد طبیعی د) $|18, 12| = 36$ عدد طبیعی

محدوده اعداد: برای نمایش محدوده اعداد، از علامت‌های $<$ و \leq استفاده می‌کنیم. عددی که کنار $<$ می‌آید، جزو محدوده نیست، ولی عددی که کنار \leq می‌آید، جزو محدوده است.

مثال ۱۵ محدوده اعداد $8 < x \leq 9$ شامل چه اعدادی می‌شود؟ این محدوده، شامل اعداد ۹- تا کوچک‌تر از ۸+ می‌شود. (دقت کنید

۹- جزو محدوده است، ولی ۸+ جزو محدوده نیست.)

مثال ۱۶ محدوده اعداد $13 < x \leq 5$ شامل چه اعدادی می‌شود؟ این محدوده، شامل اعداد بزرگ‌تر از ۵- تا عدد ۱۳+ است. (دقت کنید

۵- جزو محدوده نیست، ولی ۱۳+ جزو محدوده است.)

مثال ۱۷ محدوده اعداد $10 \leq x \leq 20$ شامل چه اعدادی می‌شود؟ این محدوده، شامل اعداد ۲۰- تا ۱۰+ است (هم ۲۰- و هم ۱۰+ جزو

محدوده هستند.)

مثال ۱۸ اعداد صحیح هر محدوده را بنویسید.

الف) $11 \leq x \leq 17$ ب) $19 < x < 18$

ج) $100 \leq x \leq 13$

محاسبه ساده تر عبارت‌ها

در جمع اعداد صحیح، می‌توانیم اعداد قرینه را با هم حذف کنیم تا حاصل عبارت راحت تر به دست آید.

مثال ۱۹ حاصل عبارت‌های مقابل را محاسبه کنید.

الف) $37 + 18 + 24 - 18 + 15 + 37 = 24 + 15 = 39$

ب) $-40 \times 3 + 12 - 24 \div (-3) - 8 + 120 = -120 + 12 + 8 - 8 + 120 = +12$

ج) $-5 - 4 - 3 - 2 - 1 + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 = -5 + 0 = -5$

دنبالهٔ اعداد منظم: به رشته‌ای از اعدادی که فاصلهٔ بین آن‌ها ثابت است، دنبالهٔ اعداد منظم یا تصاعد حسابی می‌گوییم؛ مانند:

$$۱, ۲, ۳, ۴, \dots, ۱۰۰ \quad , \quad ۶, ۸, ۱۰, ۱۲, ۱۴, \dots, ۸۸$$

فانون گاوس

یکی از نوابع ریاضی به نام **گائوس** روش جالبی برای جمع اعداد منظم کشف کرده است؛ به این صورت که عدد **اول** را با عدد **آخر** جمع می‌کند و عدد **دوم** را با عدد **یک‌مانده به آخر** جمع می‌کند و ... در این صورت **جمع** هر دو عدد، یک عدد **یکسان** ایجاد می‌کند.

مثال ۲۰ جمع اعداد ۱ تا ۵۰ را محاسبه کنید.

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 46 + 47 + 48 + 49 + 50$$

$\begin{matrix} & & & & +51 & & & & \\ & & & & +51 & & & & \\ & & & & +51 & & & & \\ & & & & +51 & & & & \end{matrix}$

مشاهده می‌کنید، جمع هر دو عدد برابر با ۵۱ شده است. از آن‌جا که ۵۰ عدد داشتیم و آن‌ها را ۲ به ۲ جمع کردیم، پس اکنون ۲۵ عدد ۵۱ داریم:

$$\underbrace{(51 + 51 + 51 + \dots + 51)}_{25 \text{ تا}} = 25 \times 51 = 1275$$

مثال ۲۱ جمع اعداد ۱ تا ۵۰۰ را محاسبه کنید.

$$1 + 2 + 3 + \dots + 498 + 499 + 500$$

$\begin{matrix} & & & & +501 & & & & \\ & & & & +501 & & & & \\ & & & & +501 & & & & \end{matrix}$

چون ۵۰۰ عدد داشتیم و آن‌ها را ۲ به ۲ جمع کرده‌ایم، پس اکنون ۲۵۰ عدد ۵۰۱ داریم. جمع = $250 \times 501 = 125250$

مثال ۲۲ یک ملخ روی نقطهٔ صفر قرار دارد. این ملخ در پرش اول، ۱۰ واحد به راست و در پرش دوم، ۵ واحد به چپ می‌پرد. در پرش سوم، ۱۰ واحد به راست و در پرش چهارم، ۵ واحد به چپ می‌پرد. اگر به همین صورت ادامه دهد، پس از ۱۸ پرش، به چه نقطه‌ای می‌رسد؟

پرش اول	پرش دوم	پرش سوم	پرش چهارم	پرش هفدهم	پرش هجدهم
$+10$	-5	$+10$	-5	\dots	$+10$
$\begin{matrix} + \\ +5 \end{matrix}$	$\begin{matrix} - \\ +5 \end{matrix}$	$\begin{matrix} + \\ +5 \end{matrix}$	$\begin{matrix} - \\ +5 \end{matrix}$	$\begin{matrix} + \\ +5 \end{matrix}$	$\begin{matrix} + \\ +5 \end{matrix}$

مشاهده می‌کنید، جمع هر دو پرش، برابر با ۵+ است و چون در کل ۱۸ پرش انجام داده و ما آن‌ها را ۲ به ۲ جمع کرده‌ایم، پس در کل ۹ عدد ۵+ داریم:

$$9 \times (+5) = +45$$

اعداد گویا: هر گاه بتوانیم یک عدد را به صورت عدد **کسری** نمایش دهیم، می‌گوییم آن عدد **گویا** است، به شرط آن که **صورت** و **مخرج** کسر، هر دو عدد **صحیح** باشند و مخرج کسر **صفر نباشد**. (صورت کسر می‌تواند صفر باشد). مانند:

گویا $\rightarrow \frac{0}{6}$ (د) گویا $\rightarrow \frac{-4}{-3}$ (ج) گویا $\rightarrow \frac{-5}{-2}$ (ب) گویا $\rightarrow \frac{3}{2}$ (الف)

گویا **نیست** (صورت اعشاری است) $\rightarrow \frac{-2}{5}$ (و) گویا **نیست** (مخرج صفر است) $\rightarrow \frac{9}{0}$ (ه)

نکته

۱) همهٔ اعداد صحیح، **گویا** هستند، زیرا می‌توانیم به آن‌ها **مخرج یک** بدهیم.

$$\text{الف) } -5 = \frac{-5}{1}$$

$$\text{ب) } +3 = \frac{+3}{1}$$

$$\text{ج) } 0 = \frac{0}{1}$$

۲) اگر **مخرج یک** کسر، **صفر** باشد، می‌گوییم **تعریف نشده** است؛ مانند: $\frac{5}{0}$.

نمایش اعداد گویا روی محور: در دورهٔ ابتدایی، نمایش اعداد گویا را روی محور آموختیم.



مثال ۲۳ اعداد $\frac{3}{5}$ ، $1\frac{1}{4}$ و $2\frac{2}{3}$ را روی محور نمایش دهید.

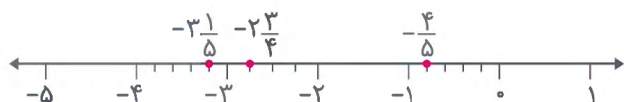


نکته

در صورتی که عدد گویا دارای علامت منفی بود، آن را در قسمت اعداد منفی نمایش می‌دهیم.



مثال ۲۴ اعداد $-\frac{4}{5}$ ، $-2\frac{3}{4}$ و $-3\frac{1}{5}$ را روی محور نمایش دهید.



تبدیل اعداد مخلوط به کسر: برای تبدیل اعداد مخلوط به کسر، کافی است قسمت صحیح عدد را در مخرج ضرب و با صورت جمع کنیم. برای اعداد مخلوط منفی، پس از تبدیل به کسر، علامت منفی را برای آن‌ها قرار می‌دهیم؛ مانند:

$$\text{الف) } 2\frac{1}{5} = \frac{2 \times 5 + 1}{5} = \frac{11}{5} \qquad \text{ب) } -3\frac{1}{4} = \frac{3 \times 4 + 1}{4} = \frac{13}{4} = -\frac{13}{4}$$

نکته

اگر یک کسر دارای علامت منفی باشد، می‌توانیم آن را برای صورت یا مخرج فرض کنیم، یا حتی علامت منفی را در کنار کسر بنویسیم؛ مانند:

$$\text{الف) } \frac{-5}{3} = \frac{5}{-3} = -\frac{5}{3} \qquad \text{ب) } -2\frac{3}{7} = \frac{-17}{7} = \frac{17}{-7} = -\frac{17}{7}$$



تبدیل عدد اعشاری به کسر: کافی است، عدد اعشاری را بدون ممیز در صورت بنویسیم و سپس در مخرج کسر، اعدادی مثل ۱۰ یا ۱۰۰ یا ۱۰۰۰ یا ... را بنویسیم (تعداد صفرها به اندازه تعداد ممیزهای عدد اعشاری خواهد بود)؛ مانند:

$$\text{الف) } -2/4 = \frac{-24}{10} \qquad \text{ب) } -3/0.3 = \frac{-3 \times 3}{100}$$

قرینه یک عدد گویا (یا اعشاری): برای نوشتن قرینه یک عدد گویا (یا اعشاری)، کافی است علامت آن را عوض کنیم، مانند:

$$\text{الف) } -2\frac{1}{4} \xrightarrow{\text{قرینه}} +2\frac{1}{4} \qquad \text{ب) } -3/6 \xrightarrow{\text{قرینه}} +3/6 \qquad \text{ج) } \frac{-5}{7} \xrightarrow{\text{قرینه}} \frac{+5}{7}$$

تعیین علامت یک عدد گویا

گاهی یک عدد گویا، چندین علامت دارد. برای تعیین علامت نهایی آن، کافی است فقط علامت‌های منفی را شمارش کنیم؛ اگر تعداد آن‌ها فرد بود، علامت نهایی منفی و اگر تعداد آن‌ها زوج بود، علامت نهایی مثبت است؛ مانند:

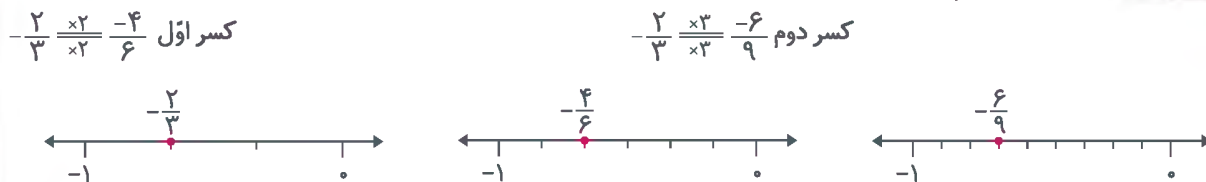
$$\text{الف) } \frac{-2}{+3} \xrightarrow{\text{۲ علامت منفی}} \frac{+2}{3} \qquad \text{ب) } \frac{-3}{-5} \xrightarrow{\text{۳ علامت منفی}} -\frac{3}{5} \qquad \text{ج) } \frac{-(-+4)}{-7} \xrightarrow{\text{۳ علامت منفی}} -\frac{4}{7}$$

کسرهای مساوی: در سال‌های قبل آموختیم که اگر صورت و مخرج یک کسر را در یک عدد مساوی ضرب کنیم، کسر جدید و کسر اول مساوی هستند. تساوی در کسرهای علامت‌دار هم، به همین صورت است؛ مانند:

$$\text{الف) } \frac{2}{5} \xrightarrow{\times 2} \frac{4}{10} \xrightarrow{\times 3} \frac{12}{30} \qquad \text{ب) } \frac{-5}{3} \xrightarrow{\times 2} \frac{-10}{6} \xrightarrow{\times 4} \frac{-40}{24} = \frac{-40}{24} \xrightarrow{\times (-3)} \frac{+120}{-72}$$



مثال ۲۵ دو کسر مساوی $\frac{-۲}{۳}$ بنویسید و روی شکل نشان دهید که با هم مساوی‌اند.



مقایسه اعداد گویا: برای مقایسه اعداد گویا، ابتدا قسمت صحیح آن‌ها را با هم و سپس قسمت کسری (اعشاری) آن‌ها را با هم مقایسه می‌کنیم. (یادآوری: در اعداد منفی، هرچه قدر مقدار عدد بزرگ‌تر باشد، ارزش آن کم‌تر است.)

نکته

در مقایسه دو کسر، مانند $\frac{-۳}{۷}$ و $\frac{-۴}{۱۰}$ ، می‌توانیم **مخرج مشترک** بگیریم:

$$\frac{-۴}{۱۰} = \frac{-۲۸}{۷۰}, \quad \frac{-۳}{۷} = \frac{-۳۰}{۷۰} \Rightarrow \frac{-۲۸}{۷۰} > \frac{-۳۰}{۷۰}$$



مثال ۲۶ هر یک از اعداد داده‌شده را با هم مقایسه کنید.

الف) $-۳\frac{۲}{۵} \square -۲\frac{۱}{۷} \Rightarrow -۳\frac{۲}{۵} < -۲\frac{۱}{۷}$

اعداد مثبت از اعداد منفی بزرگ‌تر هستند. $-۱۰\frac{۱}{۴} \square \frac{۲}{۵} \Rightarrow -۱۰\frac{۱}{۴} < \frac{۲}{۵}$ (ب)

ج) $-۳\frac{۲}{۷} \square -۳\frac{۲}{۳} \Rightarrow -۳\frac{۲}{۷} > -۳\frac{۲}{۳}$

د) $-۶\frac{۱}{۴} \square -\frac{۳۰}{-۴} \Rightarrow -۶\frac{۱}{۴} > -۷\frac{۲}{۴}$

ه) $-۲\frac{۱}{۴} \square -\frac{۱۷}{۷} \Rightarrow -۲\frac{۴}{۱۰} \square -۲\frac{۳}{۷} \Rightarrow -۲\frac{۴}{۱۰} > -۲\frac{۳}{۷}$

مثال ۲۷ بین ۲- و ۳-، چهار عدد مخلوط بنویسید.

$-۲\frac{۱}{۷}, -۲\frac{۳}{۵}, -۲\frac{۶}{۷}, -۲\frac{۹}{۱۰}$

مثال ۲۸ سه کسر علامت‌دار بنویسید که در محدوده $۰ < x \leq ۱$ قرار بگیرند.

در این جا خود ۱- هم جزو محدوده است، پس باید اعدادی بین ۱- و صفر بنویسیم.

$-\frac{۱}{۱}, -\frac{۳}{۵}, -\frac{۴}{۷}$

مثال ۲۹ پنج عدد بنویسید که در محدوده $۱ < x \leq ۲$ قرار بگیرند.

باید اعدادی بنویسیم که بین ۲- و ۱+ هستند. (خود ۱+ جزو محدوده است.)

$-\frac{۱}{۵}, -۱, ۰, \frac{۳}{۵}, +۱$

ساده کردن کسرها: برای ساده کردن یک کسر، کافی است **صورت** و **مخرج** آن را بر یک عدد مساوی **تقسیم** کنیم. (این کار را می‌توانیم در چند مرحله انجام دهیم.)

مثال ۳۰ هر یک از کسرهای داده‌شده را ساده کنید.

الف) $\frac{-۳۶}{-۲۰} \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} \frac{+۹}{۵} = \frac{+۲}{+۲} \cdot \frac{-۱۸}{-۱۰} = \frac{+۲}{+۲} \cdot \frac{-۹}{-۵}$

ب) $\frac{-۴}{۳} \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} \frac{-۴}{۳} = \frac{-۵}{+۵} \cdot \frac{+۳}{+۳} = \frac{-۲۰}{+۱۵} = \frac{-۴}{+۳}$

تذکره: می‌توانیم ابتدا **تعیین علامت** کنیم و بعد کسر را ساده کنیم.





مثال ۳۱ حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$\frac{-3}{2} \times \frac{+3}{+3} \times \frac{-9}{6} \times \frac{+8}{+8} \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} \frac{-72}{-48}$$

نکته



در صورتی که در صورت و مخرج یک کسر، همه اعداد در هم ضرب شده باشند می‌توانیم آن را ساده کنیم. برای این کار، ابتدا با شمارش علامت‌های منفی، تعیین علامت کرده سپس اعداد را بدون علامت می‌نویسیم و آن‌ها را ساده می‌کنیم.

مثال ۳۲ هر یک از عبارت‌های داده شده را ساده کنید.

الف) $\frac{-24 \times (+46)}{-32 \times (-23)} \xrightarrow{\text{تعیین علامت سه علامت منفی}} \frac{24 \times 46}{32 \times 23} = \frac{3}{2}$

ب) $\frac{(-56) \times (40) \times (-80)}{(-30) \times (-64)} \xrightarrow{\text{تعیین علامت چهار علامت منفی}} \frac{56 \times 40 \times 80}{30 \times 64} = +\frac{280}{3}$

پیدا کردن مقدار مجهول در تساوی‌ها: گاهی در تساوی بین دو کسر، مقدار یکی از قسمت‌ها مجهول است. برای پیدا کردن مقدار مجهول، می‌توانیم از روشی که در جدول تناسب استفاده می‌کردیم، کمک بگیریم، یعنی به صورت ضربدری دو عدد معلوم را در هم ضرب کنیم و در صورت بنویسیم و عددی را که در X ضرب می‌شود، در مخرج بنویسیم و آن‌ها را ساده کنیم.

$$\frac{56}{35} = \frac{x}{65} \Rightarrow x = \frac{65 \times 56}{35} = 104$$

مثال ۳۳ مقدار x را در عبارت مقابل به دست آورید.

تذکره:



در صورت داشتن علامت منفی در کنار کسرها، می‌توانیم علامت منفی را برای عددی که در صورت یا مخرج x قرار دارد، فرض کنیم.

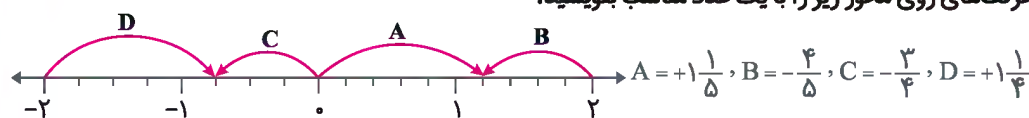
مثال ۳۴ مقدار x را در عبارت‌های زیر به دست آورید.

الف) $-\frac{24}{x} = -\frac{27}{36} \Rightarrow \frac{-24}{x} = \frac{-27}{36} \Rightarrow x = \frac{-24 \times 36}{-27} \xrightarrow{\text{تعیین علامت دو علامت منفی}} x = +\frac{24 \times 36}{27} = 32$

ب) $-\frac{x}{18} = \frac{-45}{-81} \Rightarrow \frac{x}{-18} = \frac{-45}{-81} \Rightarrow x = \frac{(-45) \times (-18)}{-81} \xrightarrow{\text{تعیین علامت سه علامت منفی}} x = -\frac{45 \times 18}{81} = -10$

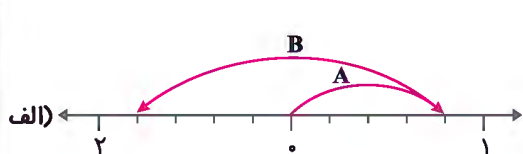
حرکت روی محور: برخی حرکت‌ها روی محور را با اعداد صحیح نمی‌توان نشان داد، بلکه برای بیان کردن آن‌ها باید از اعداد گویا استفاده کرد. (حرکت به سمت راست، علامت مثبت و حرکت به سمت چپ، علامت منفی دارد.)

مثال ۳۵ هر یک از حرکت‌های روی محور زیر را با یک عدد مناسب بنویسید.

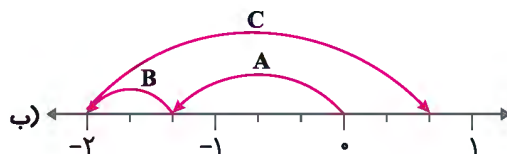


مجموع حرکت‌های متوالی: برای دو یا چند حرکت پشت سر هم، می‌توان یک جمع نوشت. کافی است اندازه هر حرکت را بنویسیم، سپس بین آن‌ها علامت جمع قرار دهیم.

مثال ۳۶ برای هر یک از شکل‌های زیر، یک جمع بنویسید.



$$A = +\frac{4}{5}, B = -\frac{1}{5} \Rightarrow \left(+\frac{4}{5}\right) + \left(-\frac{1}{5}\right)$$



$$A = -1\frac{1}{3}, B = -\frac{2}{3}, C = 2\frac{2}{3} \Rightarrow \left(-1\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right) + \left(2\frac{2}{3}\right)$$

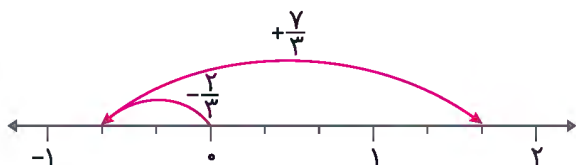
تبدیل تفریق به جمع: برای تبدیل تفریق دو کسر، کافی است که کسر دوم را به همراه علامت منفی در پرانتز بنویسیم و بین دو پرانتز، علامت جمع قرار دهیم.

مثال ۳۷ تفریق‌های کسری زیر را به جمع تبدیل کنید.

الف) $-\frac{1}{9} - \frac{12}{3} = -\frac{1}{9} + \left(-\frac{12}{3}\right)$

ب) $-\frac{3}{5} - \left(-\frac{4}{2}\right) = -\frac{3}{5} + \left(\frac{4}{2}\right)$

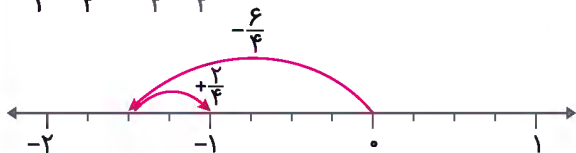
نمایش جمع روی محور: برای نمایش جمع، ابتدا از **صفر** به اندازه **عدد اول** حرکت می‌کنیم و سپس از **محل جدید** به اندازه **عدد دوم** حرکت می‌کنیم.



مثال ۳۸ حاصل جمع $-\frac{2}{3} + \frac{7}{3}$ را روی محور نمایش دهید.

تذکره: در صورت نیاز، ابتدا مخرج مشترک می‌گیریم.

$$-\frac{2}{3} + \frac{7}{4} = -\frac{6}{4} + \frac{7}{4}$$



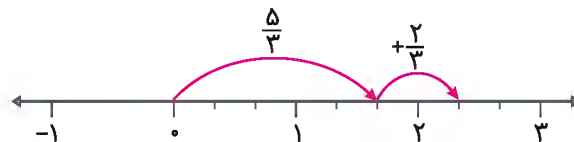
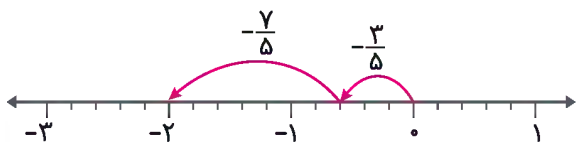
مثال ۳۹ حاصل جمع مقابل را روی محور نمایش دهید.

نمایش تفریق: برای نمایش تفریق روی محور، ابتدا آن را به جمع تبدیل می‌کنیم، سپس آن را نمایش می‌دهیم.

مثال ۴۰ حاصل تفریق‌های زیر را روی محور نمایش دهید.

الف) $-\frac{3}{5} - \frac{7}{5} = -\frac{3}{5} + \left(-\frac{7}{5}\right)$

ب) $\frac{5}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{5}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)$



محاسبه جمع و تفریق کسرها: برای جمع و تفریق دو کسر، ابتدا **مخرج مشترک** می‌گیریم، سپس صورت آن‌ها را با هم جمع و تفریق

می‌کنیم. برای انجام محاسبات ساده‌تر، موارد زیر را انجام می‌دهیم:

(۱) اگر کسری چند علامت داشت، آن را تعیین علامت می‌کنیم.

(۲) علامت هر کسر را برای صورت آن کسر در نظر می‌گیریم و مخرج‌ها را همواره مثبت فرض می‌کنیم.